Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 12

Abgabe: Montag, den 15. Juli 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 12.1 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $W_1, \ldots, W_k \subseteq V$ $(k \in \mathbb{N})$ Unterräume. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $W_1, \ldots, W_k$ sind unabhängig, d.h. für $\alpha_i \in W_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ folgt aus $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

(ii) Für $j = 2, \ldots, k$ gilt $W_j \cap (W_1 + \ldots + W_{j-1}) = \{0\}$.

(iii) Für Basen $\mathcal{B}_i$ von W_i $(i = 1, \ldots, k)$ ist $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ eine Basis für $W_1 + \ldots + W_k$.

Aufgabe 12.2 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ mit Eigenwert $c \in K$ und $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_l)$ eine Jordankette der Länge $l \in \mathbb{N}$ zum Eigenwert c.

(a) Zeigen Sie, dass $\{v_1, \ldots, v_l\}$ linear unabhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $W := span\{v_1, \ldots, v_l\}$ T-invariant ist.

(c) Beweisen Sie

$$[T_W]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & c & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.3 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $W_1, \ldots, W_k \subseteq V$ $(k \in \mathbb{N})$ Unterräume sodass $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ und $T \in \mathcal{L}(V, V)$ sodass W_i T-invariant für $i = 1, \ldots, k$ ist. Sei ferner $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis von W_i für $i = 1, \ldots, k$ und $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$. Beweisen Sie

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T_{W_k}]_{\mathcal{B}_k} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.4 (*4 Punkte*)

Berechnen Sie die Jordan-Normalform von

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 3 & 15 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Dokumentieren Sie jeden Ihrer Schritte ausführlich.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (*4 Bonuspunkte*)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum.

(a) Sei $X := \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ $(n \in \mathbb{N})$ eine linear unabhängige Menge sodass $span(X) \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie, dass X zu einer Basis eines Komplements von W ergänzt werden kann.

(b) Folgern Sie, dass das Komplement eines Unterraums im Allgemeinen nicht eindeutig ist und geben Sie ein explizites Beispiel für die Nicht-Eindeutigkeit in $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.